

УДК 519.633.2

МЕТОД ПСЕВДОХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Михайлов И.Е.* , Нурбаев У.Д.**

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

**Московский физико-технический институт (государственный университет),
г. Долгопрудный, Московская обл.

Поступила в редакцию 08.11.2012, после переработки 21.03.2013.

В статье предлагается маршевый численный метод расчета трехмерных уравнений гиперболического типа. Этот метод является обобщением классического метода характеристик, и мы будем называть его методом псевдохарактеристик. Предложенный метод псевдохарактеристик был применен для расчета обтекания эллиптического параболоида сверхзвуковым стационарным потоком газа при различных углах атаки. Результаты расчетов показывают высокую эффективность метода. Метод может быть использован при проведении практических расчетов.

In this paper we suggest numerical method for solving 3D hyperbolic equations. The method generalizes classical method of characteristics. Proposed method of pseudocharacteristics was applied to solve 3D supersonic static flow of ideal gas around elliptic paraboloid under different attack angles. Obtained results show high efficiency of the method. The method of pseudocharacteristics can be used in practice.

Ключевые слова: метод псевдохарактеристик, сверхзвуковое обтекание пространственных тел.

Keywords: method of pseudocharacteristics, supersonic flow around 3D objects.

Введение

Численные методы, с помощью которых до настоящего времени решалась задача обтекания пространственных тел потоком газа в сверхзвуковой области, можно разделить на три группы: сеточные методы, характеристические методы и сеточно-характеристические методы.

В 1964 г. К. И. Бабенко и др. в работе [1] предложили сеточный метод установления для расчета обтекания пространственных конических тел идеальным газом. В 1970 г. А. Н. Любимов и В. В. Русанов использовали метод установления для расчета обтекания затупленных тел [2], [3]. В 1960-е годы С.К. Годунов и др. предложили сеточный метод решения многомерных задач газовой динамики, записываемая уравнения движения не в дифференциальной форме, а в интегральной [4]. В

1969 г. Р.В. Мак-Кормак предложил сеточный метод типа «предиктор–корректор», в котором на первом шаге вычислялась вспомогательная функция, а на втором шаге эта вспомогательная функция использовалась для расчета искомой функции [5].

В 1978 г. В. М. Борисов и И. Е. Михайлов разработали прямой метод характеристик для расчета пространственных сверхзвуковых безвихревых течений [6]. Данный метод обладал высокой точностью и быстродействием, но расчетная сетка получалась плавающей.

В 1988 г. К. М. Магомедов и А.С. Холодов предложили сеточно-характеристический метод [7], который использовал достоинства как характеристического, так и сеточного метода, однако для расчета требовалась интерполяция на известном слое и был осложнен расчет ударной волны.

Недостатки вышеупомянутых методов — нерегулярная расчетная сетка, интерполяция на известном слое и требование большого машинного времени — усложняют проведение расчетов. В настоящей статье предлагается численный метод, использующий регулярную расчетную сетку, который обладает высокой точностью и не требует промежуточных интерполяций, за исключением расчета ударной волны.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об обтекании пространственных тел сверхзвуковым стационарным потоком идеального газа.

При таком обтекании течение газа будет смешанным — между поверхностями ударной волны (УВ) и тела имеются дозвуковые (I), трансзвуковые (ЗЛ) и сверхзвуковые (II) области (рис. 1).

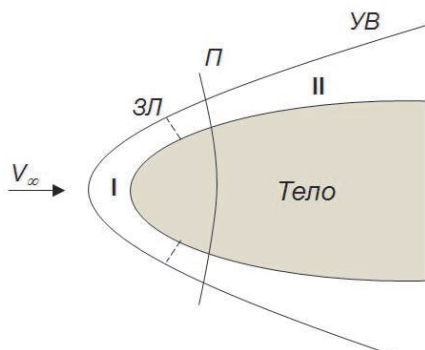


Рис. 1: Области между поверхностями ударной волны и тела

В дозвуковой области течение газа описывается уравнениями в частных производных эллиптического типа, а в сверхзвуковой — гиперболического типа.

Мы будем рассматривать течение газа в сверхзвуковой области, ограниченной поверхностью ударной волны, поверхностью тела и некоторой поверхностью П, целиком лежащей в сверхзвуковой области течения и такой, что характеристические конуса с вершинами, лежащими на П, пересекают ее только в одной точке. Такие поверхности называются пространственноподобными. Зададим на ней

семейство гладких непересекающихся замкнутых линий, огибающих тело (такие линии мы будем называть венками). Если из каждой точки венка выпустить характеристический конус, то две поверхности, огибающие эти конуса, также являются характеристическими поверхностями, проходящими через венок. Эти поверхности называются волновыми характеристическими поверхностями. Кроме волновых характеристических поверхностей, в сверхзвуковой области течения через каждый венок проходит третья характеристическая поверхность, называемая характеристической поверхностью тока. На характеристических поверхностях можно записать линейные комбинации исходных уравнений в форме, содержащей только производные в направлении двух касательных к каждой поверхности векторов. Эти линейные комбинации называются условиями совместности, и они вместе с уравнениями характеристических поверхностей образуют каноническую характеристическую систему уравнений. Метод характеристик в [6] основывался на этих свойствах уравнений гиперболического типа.

Введем цилиндрическую систему координат (x, r, φ) . Тело будем считать неподвижным, а поток на бесконечности равномерным. Дифференциальные уравнения, описывающие движение газа, запишем в следующем виде:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0; \quad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0; \quad \frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (1)$$

где ρ — плотность, $\vec{V} = (u, v, w)'$ — скорость (верхний индекс штрих — знак транспонирования), p — давление газа, k — показатель адиабаты и ∇ — оператор Гамильтона.

Граничным условием на поверхности тела является условие непротекания

$$(\vec{V}, \vec{n}) = 0, \quad (2)$$

где \vec{n} — вектор единичной нормали к поверхности тела. На ударной волне выполняются условия Ренкина–Гюгонио [8]. Систему (1) можно записать в следующем виде

$$A \vec{U}_x + B \vec{U}_r + C \vec{U}_\varphi = \vec{f}, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{uv}{a^2} & -\frac{uw}{a^2} & 0 \\ \rho u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} & -\frac{vw}{a^2} & 0 \\ \rho v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{uw}{a^2} & -\frac{vw}{a^2} & (1 - \frac{w^2}{a^2}) & 0 \\ \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{f} = \frac{1}{r}(-v, 0, \rho w^2, -v\rho w)'$, $a^2 = k \frac{p}{\rho}$ — местная скорость звука, \vec{U} — вектор искомым переменных, $\vec{U}_x, \vec{U}_r, \vec{U}_\varphi$ — частные производные по соответствующей координате.

Система (3), граничные условия на теле (2), соотношения Ренкина–Гюгонио на ударной волне и начальные данные на поверхности Π позволяют определить искомые величины во всей рассматриваемой сверхзвуковой области движения газа.

2. Метод псевдохарактеристик

Для простоты изложения будем рассматривать в качестве пространственноподобной поверхности Π плоскость $x = x_0$. Для численного решения задачи введем сетку в рассматриваемой области течения. На плоскостях $x_s = x_0 + s \cdot \Delta x$ ($s = 1, 2, 3, \dots$), где Δx — шаг сетки по координате x , введем семейства равноудаленных непересекающихся венков $r_j = r_j(x_s, \varphi)$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$. При этом венок $r_J(x_s, \varphi)$ лежит на ударной волне, а венок $r_0(x_s, \varphi)$ — на обтекаемом теле. Точки пересечения этих венков и меридиональных плоскостей $\varphi = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, образуют фиксированную сетку в рассматриваемой области (положение узлов сетки в плоскостях x_s при $s \geq 1$ определяются в процессе расчета после нахождения точек $r_J = r_J(x_s, \varphi_i)$ на ударной волне).

Расчет течения в рассматриваемой области разобьем на три элементарные задачи: расчет искомых функций во внутренней точке области течения, на обтекаемом теле и на ударной волне.

2.1 Расчет искомых функций во внутренней точке области течения

Пусть известны все газодинамические величины в плоскости x_s . Рассмотрим некоторую меридиональную плоскость $\varphi = \varphi_i$. На линии пересечения плоскостей x_s и φ_i введем точки 1 и 2, а на линии пересечения x_{s+1} и φ_i — точку 3 (см. рис.2а). Положение точек в поле течения задается по следующим формулам (предполагается, что координаты венка $r_J(x_{s+1}, \varphi_i)$ известны, то есть известно положение ударной волны в плоскости $x = x_{s+1}$ для $\varphi = \varphi_i$):

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0(x_s, \varphi_i) + j_1 \frac{r_J(x_s, \varphi_i) - r_0(x_s, \varphi_i)}{J}, \\ r_2 &= r_0(x_s, \varphi_i) + j_2 \frac{r_J(x_s, \varphi_i) - r_0(x_s, \varphi_i)}{J}, \\ r_3 &= r_0(x_{s+1}, \varphi_i) + j_3 \frac{r_J(x_{s+1}, \varphi_i) - r_0(x_{s+1}, \varphi_i)}{J}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq J - 1$. Кроме того, $j_2 - j_1 = 2$ и $j_2 - j_3 = j_3 - j_1 = 1$.

Венки, на которых лежат точки 1, 2 и 3, также будем называть венками 1, 2 и 3. Поверхности, проходящие через венки 1 и 3, будем называть расчетными поверхностями первого семейства, а поверхности, проходящие через венки 2 и 3 — расчетными поверхностями второго семейства.

Рассмотрим линию 1–3, образованную пересечением расчетной поверхности первого семейства и меридиональной плоскости $\varphi = \varphi_i$. Ее можно записать в параметрической форме $x = x, r = r(x), \varphi = \varphi_i$, взяв в качестве параметра независимую переменную x . Тогда на этой линии любая функция $g(x, r, \varphi) = g(x, r(x), \varphi_i)$ является функцией одной переменной x . Полная производная по x от этой функции вдоль линии 1–3 примет вид

$$\left(\frac{dg}{dx} \right)_1 = g_x + g_r \left(\frac{dr}{dx} \right)_1, \quad \text{или} \quad g_x = \left(\frac{dg}{dx} \right)_1 - g_r \left(\frac{dr}{dx} \right)_1, \quad (5)$$

где g_x и g_r — частные производные, а индекс 1 указывает, что равенство записано на линии 1–3.

Рассмотрим теперь какой-нибудь венок. Запишем его в параметрической форме $x = x_s$, $r = r(\varphi)$, $\varphi = \varphi$, взяв в качестве параметра независимую переменную φ . Тогда на венке любая функция $g(x, r, \varphi) = g(x_s, r(\varphi), \varphi)$ является функцией одной переменной φ . Полная производная по φ вдоль венка примет вид

$$\frac{dg}{d\varphi} = g_r \frac{dr}{d\varphi} + g_\varphi, \text{ или } g_\varphi = \frac{dg}{d\varphi} - g_r \frac{dr}{d\varphi}, \quad (6)$$

где g_r и g_φ — частные производные.

С учетом (5) и (6) перепишем систему (3) в точке 3 в виде

$$A \left(\frac{d\vec{U}}{dx} \right)_1 + \left[B - A \left(\frac{dr}{dx} \right)_1 - C \frac{dr}{d\varphi} \right] \vec{U}_r = \vec{f} - C \frac{d\vec{U}}{d\varphi}.$$

Перепишывая аналогично систему (3) в точке 3 с использованием линии 2–3, получим

$$A \left(\frac{d\vec{U}}{dx} \right)_2 + \left[B - A \left(\frac{dr}{dx} \right)_2 - C \frac{dr}{d\varphi} \right] \vec{U}_r = \vec{f} - C \frac{d\vec{U}}{d\varphi}.$$

Введем новую искомую вектор-функцию $\vec{R} = \vec{U}_r$. В таком случае мы получим в точке 3 следующую систему уравнений для функций \vec{U} , \vec{R} :

$$\begin{aligned} A \left(\frac{d\vec{U}}{dx} \right)_1 + \left[B - A \left(\frac{dr}{dx} \right)_1 - C \frac{dr}{d\varphi} \right] \vec{R} &= \vec{f} - C \frac{d\vec{U}}{d\varphi}, \\ A \left(\frac{d\vec{U}}{dx} \right)_2 + \left[B - A \left(\frac{dr}{dx} \right)_2 - C \frac{dr}{d\varphi} \right] \vec{R} &= \vec{f} - C \frac{d\vec{U}}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем, что функция \vec{U} , являющаяся решением системы (7) в точке 3, также является решением исходной системы (3). Действительно, вычитая и складывая первое и второе уравнения (7) мы получим систему уравнений (с учетом $\det A \neq 0$):

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{U}_r, \\ A\vec{U}_x + B\vec{R} &= \vec{f} - C\vec{U}_\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем исходную систему (3).

Систему (7) будем аппроксимировать на двух расчетных поверхностях 1–3 и 2–3. Расчетные поверхности не являются, вообще говоря, характеристическими, однако, как и условия совместности на характеристических поверхностях, уравнения (7) не содержат производных в направлениях, пересекающих эти поверхности. Поэтому аппроксимация уравнений на этих поверхностях осуществлялась аналогично аппроксимации канонической характеристической системы, примененной в [6]. А именно, производные по x аппроксимировались центральными разностями, а производные по φ находились дифференцированием кубического сплайна, построенного по всем точкам соответствующего венка. Поэтому численный метод, основанный на аппроксимации системы (7) на расчетных поверхностях, мы назвали методом псевдохарактеристик.

Соединив точку 3 с точками 1 и 2, получим шаблон в каждой меридиональной плоскости для расчета искомых величин в поле течения (рис. 2а).

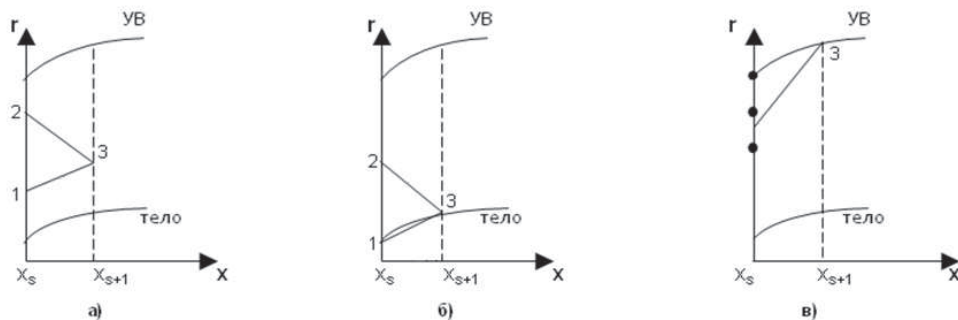


Рис. 2: Шаблоны для расчета искомых величин в некоторой меридиональной плоскости: а) в поле течения, б) на поверхности тела, в) на ударной волне

Разностная схема, аппроксимирующая систему (7) на шаблоне, изображенном на рис. 2а, примет вид:

$$\begin{aligned} A^{31} \frac{\vec{U}_{31}}{x_{31}} + \left[B - A \frac{r_{31}}{x_{31}} - C \frac{dr}{d\varphi} \right]^{31} \vec{R}^{31} &= \left[f - C \frac{d\vec{U}}{d\varphi} \right]^{31}, \\ A^{32} \frac{\vec{U}_{32}}{x_{32}} + \left[B - A \frac{r_{32}}{x_{32}} - C \frac{dr}{d\varphi} \right]^{32} \vec{R}^{32} &= \left[f - C \frac{d\vec{U}}{d\varphi} \right]^{32}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi^{3l} = \frac{\xi_3 + \xi_l}{2}$, $\xi_{3i} = \xi_3 - \xi_l$, $l = 1, 2$ — точки шаблона.

Выбранный способ обеспечивает второй порядок аппроксимации по x и φ . В системе (8) присутствуют газодинамические функции во всех точках венка, число точек которого равно числу меридиональных плоскостей N . Искомыми величинами являются вектор-функция $(\vec{U}, \vec{R})'$. Поэтому мы получаем систему $8N$ уравнений с $8N$ неизвестными.

Система (8) является нелинейной, поскольку матрицы A , B и C являются функциями искомых величин. Поэтому решение ищется с помощью итераций. В качестве начального приближения искомых величин в точке 3 берется полусумма соответствующих величин в точках 1 и 2. При проведении расчетов число итераций бралось равным трем (как и в классическом методе характеристик [9]).

2.2 Расчет искомых функций в точке на обтекаемом теле

Для расчета искомых функций в точке на твердой стенке используем шаблон, изображенный на рис. 2б. По известным величинам в точках 1 и 2 требуется найти искомые величины в точке 3 на теле в некоторой меридиональной плоскости $\varphi = \varphi_i$.

Координаты точек задаются по формулам (4) при условии, что $j_1 = 0$, $j_2 = 1$ и $j_3 = 0$. Разностная система уравнений для нахождения искомых величин на теле совпадает с (8).

На поверхности тела выполняется граничное условие непротекания (2), которое является дополнительным уравнением к системе (8). Записывая вместо одного из уравнений системы (8) это условие, получим новую систему из $8N$ уравнений с $8N$ неизвестными, которую также решаем с помощью итераций. Опыт расчетов показал, что наилучшая точность достигается при замене первого уравнения вдоль линии 1-3.

2.3 Расчет искомых функций в точке на ударной волне

Искомые величины за ударной волной определяются из соотношений Ренкина–Гюгонио и зависят только от угла наклона ударной волны к оси x в точке 3 (рис. 2в) в меридиональной плоскости $\varphi = \varphi_i$. Однако сложность расчета точки на ударной волне заключается в том, что угловой коэффициент наклона $\frac{dr_J(x_{s+1}, \varphi_i)}{dx_{s+1}}$ и положение ударной волны $r_J(x_{s+1}, \varphi_i)$ в точке 3 заранее неизвестны и также подлежат определению.

Расчет углового коэффициента наклона и искомых газодинамических функций на ударной волне проводился с помощью итераций как в классическом методе характеристик [9]. В качестве начального приближения угол наклона в плоскости x_{s+1} приравнялся к углу наклона в плоскости x_s , который предполагается известным. Далее из соотношений Ренкина–Гюгонио находились газодинамические величины в точке 3 и проверялось равенство нулю условия совместности на характеристике, выпущенной из точки 3 и пересекающей плоскость x_s . Если равенство нулю не выполнялось, то корректировался угловой коэффициент наклона ударной волны в точке 3 и весь расчет повторялся заново.

Расчет газодинамических величин в рассматриваемой области течения газа осуществляется по следующему алгоритму. Пусть известны газодинамические функции на всех венках в плоскости x_s . Сначала происходит расчет точки на ударной волне, и определяются газодинамические величины и координаты ударной волны $r_J(x_{s+1}, \varphi_i)$ для всех φ_i в плоскости x_{s+1} . По найденному положению ударной волны и заданным координатам обтекаемого тела $r_0(x_{s+1}, \varphi_i)$ находятся координаты $r_j(x_{s+1}, \varphi_i)$ для всех φ_i в плоскости x_{s+1} по формулам (4). Далее рассчитываются газодинамические величины в поле течения на плоскости x_{s+1} (расчет точки в поле течения) при $1 \leq j \leq J - 1$. Последним проводится расчет точки на обтекаемом теле при $j = 0$. Аналогично проводится расчет плоскости x_{s+2} по известным величинам в плоскости x_{s+1} и так далее.

3. Результаты расчетов

При расчете внешнего обтекания сверхзвуковым потоком эллиптического параболоида методом псевдохарактеристик были получены результаты, которые представлены на рис. 3–6. Все величины обезразмерены к параметрам в набегающем потоке. Машинное время, необходимое для расчета, составило 1–2 минуты.

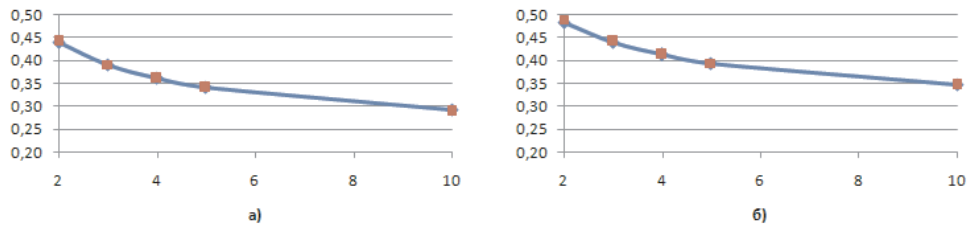


Рис. 3: Табличные (квадраты) и расчетные (ромбы) значения тангенса угла наклона ударной волны в меридиональной плоскости $\varphi = 20^\circ$ при а) угле атаки 5° и б) угле атаки 0°

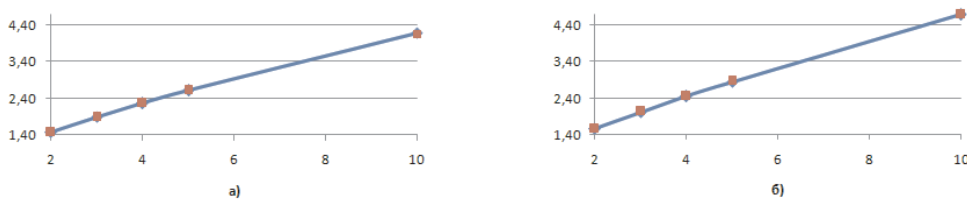


Рис. 4: Табличные (квадраты) и расчетные (ромбы) значения координаты ударной волны в меридиональной плоскости $\varphi = 20^\circ$ при а) угле атаки 5° и б) угле атаки 0°

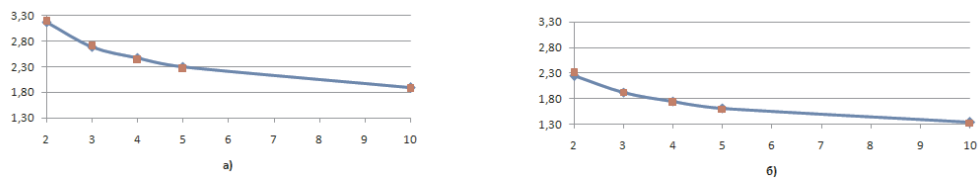


Рис. 5: Табличные (квадраты) и расчетные (ромбы) значения давления на теле в меридиональной плоскости $\varphi = 20^\circ$ при а) угле атаки 5° и б) угле атаки 0°

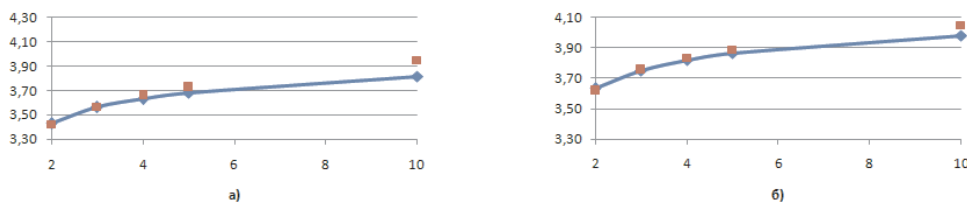


Рис. 6: Табличные (квадраты) и расчетные (ромбы) значения скорости на теле в меридиональной плоскости $\varphi = 20^\circ$ при а) угле атаки 5° и б) угле атаки 0°

Как видно из рисунков, результаты расчета согласуются с табличными данными [3], несмотря на то, что расчет табличных данных проводился с шагами, в два раза более мелкими по переменным r, φ .

Заключение

Таким образом, предложен маршевый метод псевдохарактеристик второго порядка аппроксимации для расчета нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа с тремя независимыми переменными. Этот метод объединяет достоинства характеристических методов, имеющих высокую точность, и сеточных методов, опирающихся на фиксированную сетку. В отличие от характеристических методов, он не требует использования характеристической поверхности тока и условий совместности на ней. Результаты расчетов показывают высокую эффективность метода.

Список литературы

- [1] Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом / К.И. Бабенко и др. М.: Наука, 1964. 505 с.
- [2] Любимов А.Н., Русанов В.В. Течение газа около тупых тел. Т. 1. Метод расчета и анализ течений. М.: Наука, 1970. 287 с.
- [3] Любимов А.Н., Русанов В.В. Течение газа около тупых тел. Т. 2. Таблицы газодинамических функций. М.: Наука, 1970. 379 с.
- [4] Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов и др. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [5] MacCormack R.W. The Effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper № 69-354. 1969.
- [6] Борисов В.М., Михайлов И.Е. Метод характеристик для расчета пространственных сверхзвуковых безвихревых течений // ЖВМ и МФ. 1978. Т. 18, № 5. С. 1243–1255.
- [7] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 290 с.
- [8] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 368 с.
- [9] Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик / О.Н. Кацкова и др. М.: ВЦ АН СССР, 1961. 59 с.